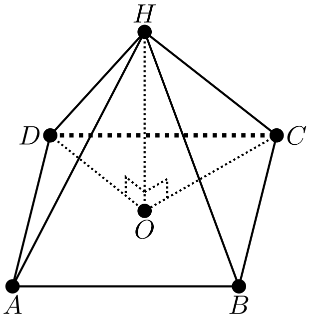
Problème 1 : Jeux olympiques et pyramides

Dans ce problème, nous étudierons des *pyramides équilatérales à base carrée*. Une pyramide équilatérale à base carrée est une pyramide $ABCDH$ dont la base est un carré $ABCD$, dont le sommet est le point H, et dont chacune des quatre faces latérales est un triangle équilatéral.

On notera également O le pied de la hauteur issue de H, c'est-à-dire le point de la face $ABCD$ tel que la droite (OH) soit perpendiculaire à la face $ABCD$.

Par exemple, voici un dessin d'une telle pyramide.



Questions à choix multiples

Question 1.

Qui est l'architecte qui a construit la pyramide du Louvre ?

Solution.

Il s'agit de Ieoh Ming Pei.

Question 2.

Catwoman participe à l'épreuve de sprint des jeux olympiques super-héroïques.

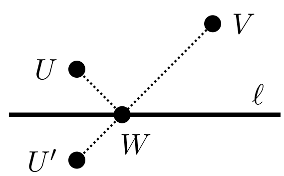
En quart de finale, elle doit courir du point U, de coordonnées $(0, 1)$, en un point de la ligne ℓ, d'équation $y = 0$, puis arriver au point V, de coordonnées $(3, 2)$. Elle souhaite minimiser la longueur du chemin qu'elle devra parcourir.

Soit W le point en lequel elle devra toucher la ligne ℓ. Quelle est l'abscisse du point W ?

Solution.

Il est clair que Catwoman va aller de U à W puis de W à V en ligne droite. D'autre part, dessinons le symétrique du segment $[UW]$ par rapport à la droite ℓ. Il s'agit en fait du segment $[U'W]$, où U' est le symétrique de U par rapport à ℓ, et a pour coordonnées $(0, -1)$.

Mais alors la distance que parcourt Catwoman vaut $UW + WV = U'W + WV \geqslant U'W$, et Catwoman a donc intérêt à choisir W à l'intersection de ℓ et du segment $[U'W]$. Ainsi, W sera le point de coordonnées $(1, 0)$, et son abscisse vaut 1.



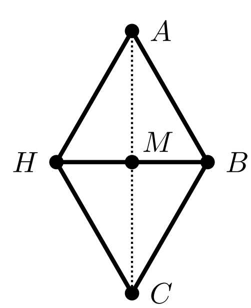
Question 3.

En demi-finale, Catwoman doit courir sur les faces latérales d'une pyramide équilatérale à base carrée $ABCDH$, de côté $AB = 1$. Elle doit aller du point A au point C en passant par l'arête $[BH]$. L'arbitre Antoine vérifiera qu'elle passe bien par un point du segment $[BH]$.

Ses super-pouvoirs félins permettent à Catwoman de ne pas être ralentie par la pente de la pyramide, et elle souhaite donc minimiser la longueur du chemin à parcourir. Soit M le point en lequel elle devra toucher l'arête $[BH]$. Quel est le point M ?

Solution.

On utilise une ruse analogue, en se ramenant à une situation où le chemin à parcourir se trouve dans un plan. Ainsi, Catwoman se ramène à aller aussi vite que possible de A à C en passant par $[BH]$ sur le dessin ci-dessous. Dans ces conditions, puisque ABH et BCH sont tous deux équilatéraux, Catwoman va aller en ligne droite de A à C, donc passer par le milieu de $[BH]$, qui n'est autre que le point M.



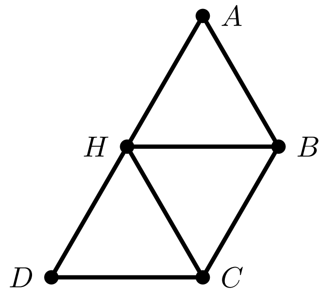
Question 4.

En finale, Catwoman doit courir sur la même pyramide. Cette fois-ci, elle doit aller du point A au point D en passant par les arêtes $[BH]$ et $[CH]$. Antoine vérifie qu'elle passe bien par un point de chacun de ces segments.

Elle veut de nouveau minimiser la longueur du chemin à parcourir. Quelle est cette longueur minimale ?

Solution.

Là encore, Catwoman se ramène à aller aussi vite que possible de A à D en passant par $[BH]$ et $[CH]$ sur le dessin ci-dessous. Dans ces conditions, elle va passer par H, et la distance minimale à parcourir vaut donc 2.



Questions à rédiger

Question 5.

Soit $ABCDH$ une pyramide équilatérale à base carrée, de base $ABCD$ et de sommet H. On rappelle que O est le pied de la hauteur issue de H dans la pyramide $ABCDH$.

Démontrer que O est le milieu du carré $ABCD$.

Solution.

D'après le théorème de Pythagore, on sait que $AO^2+OH^2 = AH^2 = BH^2 = BO^2+OH^2$, donc que $AO = BO$. De la même manière, on montre en fait que $AO = BO = CO = DO$. Ainsi, O est bien le milieu du carré $ABCD$.

Question 6.

La pyramide du Louvre possède une base carrée et des faces latérales triangulaires. La longueur de chaque côté du carré est de 35 m, et la hauteur de la pyramide est de 21 m.

La pyramide du Louvre est-elle une pyramide équilatérale à base carrée ?

Solution.

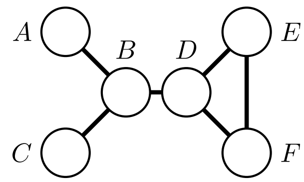
Supposons que la pyramide du Louvre soit une pyramide équilatérale à base carrée. Alors O est le milieu de $ABCD$, donc $AO = CO = AO/2$. Or, d'après le théorème de Pythagore, on sait que $AC^2 = 2AB^2$. On en déduit que $AO^2 = AB^2/2$, puis que $OH^2 = AH^2 - AO^2 = AB^2 - AB^2/2 = AB^2/2$.

Or, ici, on a en fait $AB^2 = 1225 \text{ m}^2$ et $OH^2 = 441 \text{ m}^2$, donc $OH^2 \neq AH^2/2$. Ainsi, la pyramide du Louvre n'est en fait pas équilatérale à base carrée.

Problème 2 : Problème 2 : Moyennes, cercles et voisins

Sur une feuille de papier, Clara et Pierre ont dessiné la figure représentée ci-dessous. Cette figure est formée de six cercles, appelés A, B, C, D, E et F, et de traits qui relient certains des cercles.

On dit que deux cercles sont *voisins* s'ils sont reliés par un trait. Ainsi, dans l'exemple ci-dessous, les cercles A et B sont voisins, mais les cercles C et E ne sont pas voisins.



Chaque soir, une fois par jour, Clara et Pierre jouent au jeu suivant :

(a) Pierre colorie certains cercles en gris (au moins 1 et pas plus de 5) ; les autres cercles restent blancs.

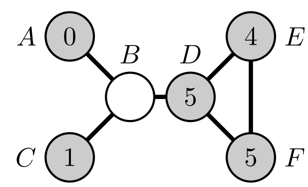
(b) Clara écrit un entier dans chaque cercle gris.

(c) Pierre écrit un entier dans chaque cercle blanc.

(d) Pierre gagne si, une fois tous ces entiers écrits, chaque nombre écrit sur un cercle blanc est égal à la moyenne des nombres écrits dans les cercles qui lui sont voisins.

Questions à choix multiples

Question 7.



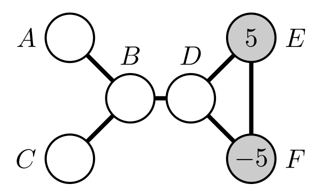
Voici la figure obtenue lundi après les étapes (a) et (b).

Quel entier Pierre doit-il écrire dans le cercle B afin de gagner ?

Solution.

Le nombre que doit écrire Pierre est nécessairement $(0 + 1 + 5)/3 = 2$.

Question 8.



Voici la figure obtenue mardi après les étapes (a) et (b).

Quel entier Pierre doit-il écrire dans le cercle B afin de gagner ?

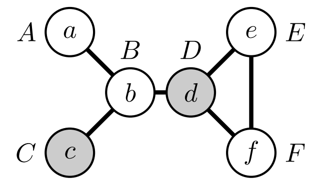
Solution.

Notons a, b, c et d les nombres qu'écrit respectivement Pierre dans les sommets A, B, C et D. Alors il gagne si et seulement si

$$\begin{cases} a = b \\ c = b \\ 3b = a + c + d \\ 3d = b + 5 - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ c = b \\ 3b = 2b + d \\ 3d = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ c = b \\ b = d \\ 3d = b \end{cases},$$

c'est-à-dire si et seulement s'il n'écrit que des 0.

Question 9.



Mercredi, durant l'étape (a), Pierre a colorié les cercles C et D en gris, mais pas les cercles A, B, E et F. Puis, après l'étape (d), il s'avère que Pierre a gagné.

Soit a l'entier écrit dans le cercle A, b l'entier écrit dans le cercle B, etc, comme illustré ci-contre.

Parmi les affirmations ci-dessous, une seule est fausse. Laquelle ?

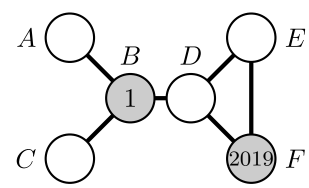
Solution.

Comme précédemment, si Pierre gagne, c'est que

$$\begin{cases} a = b \\ 3b = a + c + d \\ 2e = d + f \\ 2f = d + e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ 2b = c + d \\ 2e = d + f \\ 4f = 2d + 2e = 3d + f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ 2b = c + d \\ 2e = d + f \\ f = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ 2b = c + d \\ e = d \\ f = d \end{cases}$$

Par conséquent, les affirmations A, C, D et E sont nécessairement correctes, alors que l'affirmation B est nécessairement fausse.

Question 10.



Voici la figure obtenue jeudi après les étapes (a) et (b).

Quel nombre Pierre doit-il écrire dans le cercle D afin de gagner ?

Solution.

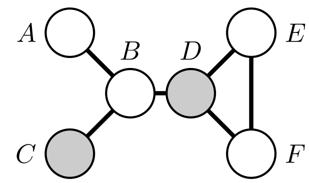
Encore une fois, si Pierre gagne, c'est que

$$\begin{cases} a = 1 \\ c = 1 \\ 3d = 1 + 2019 + e \\ 2e = d + 2019 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = 1 \\ 3d = 2020 + e \\ 6e = 3d + 3 \times 2019 = 4077 + e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = 1 \\ 3d = 2020 + e \\ 5e = 4077 \end{cases}$$

Puisque 4077 n'est pas divisible par 5, Pierre ne peut donc pas gagner.

Questions à rédiger

Question 11.



Voici la figure obtenue vendredi après l'étape (a).

Isabelle dit alors à Clara d'écrire un entier pair et un entier impair.

Démontrer que, si Clara suit ce conseil, elle est sûre de gagner.

Solution.

On a démontré en question 9 que, si Pierre gagne, alors $2b = c + d$. Or, si Clara suit le conseil d'Isabelle, l'entier $c + d$ sera la somme d'un entier pair et d'un entier impair, donc ce sera un entier impair. Par conséquent, Pierre ne pourra jamais trouver d'entier b tel que $2b = c + d$, et il est sûr de perdre.

Question 12.

Samedi, avant même que la partie ne commence, Isabelle dit à Pierre de ne surtout pas écrire de nombre strictement plus grand que tous les nombres qu'aura écrits Clara durant la phase (b).

Démontrer que, si Pierre ne suit pas ce conseil, il est sûr de perdre.

Solution.

Supposons que Pierre n'a pas suivi le conseil d'Isabelle mais a quand même réussi à gagner. Soit S_0 un cercle où Pierre a écrit son entier le plus grand, et soit $S_1, \ldots, S_k$ les voisins de S_0. En notant s_i l'entier écrit (par Pierre ou par Clara) dans le cercle S_i, on constant que $s_0 \geqslant s_i$ pour tout i.

Or, si Pierre a gagné, c'est donc entre autres que s_0 est égal la moyenne des entiers s_i, et donc que tous les entiers s_i sont égaux à s_0. Puisque s_0 est strictement supérieur à tous les entiers qu'a écrits Clara, chaque entier s_i a été écrit par Pierre.

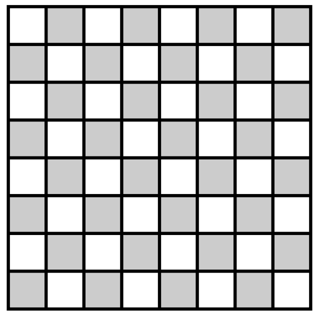
Mais alors les voisins de S_0, puis les voisins des voisins de S_0, et même les voisins des voisins des voisins de S_0 contiennent tous l'entier s_0, et n'ont pas été coloriés en gris.

Cependant, quel que soit le cercle S_0 considéré, tout cercle de la figure est soit un voisin de S_0, soit un voisin de voisin de S_0, soit un voisin de voisin de voisin de S_0. Puisque l'un de ces cercles a dû être colorié en gris, notre supposition initiale était nécessairement fausse. Ainsi, si Pierre ne suit pas le conseil d'Isabelle, il va forcément perdre.

Problème 3 : Des chocolats servis sur un plateau

À Noël, Morgane a reçu un échiquier, c'est-à-dire un plateau de jeu carré à 8×8 cases, comme illustré ci-dessous. Elle adore manger du chocolat et jouer avec son échiquier.

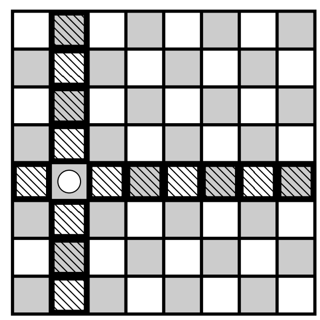
Chaque soir, elle essaie de positionner des chocolats sur son échiquier, en mettant au plus un chocolat par case, de manière à satisfaire certaines règles qui changent tous les jours.



Questions à choix multiples

Question 13.

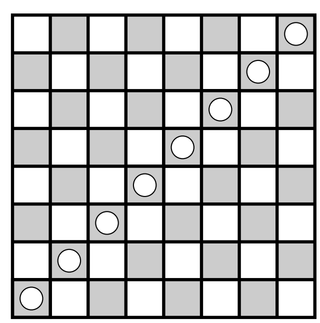
Lundi, Morgane décide de poser au plus un chocolat dans chaque ligne et chaque colonne.



Par exemple, si elle place un chocolat dans la case située en $2^{\text{ème}}$ colonne (en partant de la gauche) et en $5^{\text{ème}}$ ligne (en partant du haut), alors elle ne peut plus poser d'autres chocolats sur cette colonne et sur cette ligne, comme illustré ci-contre (le cercle blanc représente le chocolat de Morgane, et les cases hachurées sont les cases où Morgane n'a plus le droit de poser de chocolat).

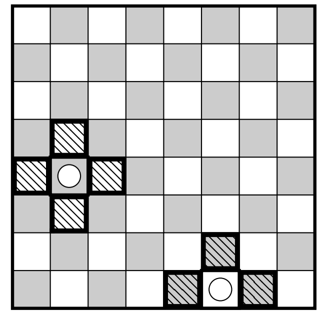
Combien, au maximum, Morgane peut-elle placer de chocolats sur son échiquier ?

Solution.



Puisque chaque ligne ne peut contenir qu'un chocolat au maximum et que l'échiquier comporte 8 lignes, Morgane ne pourra pas placer plus de 8 chocolats. Puisqu'elle peut placer 8 chocolats en procédant comme ci-contre, le maximum recherché est 8.

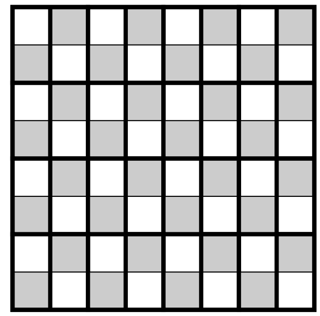
Question 14.



Mardi, Morgane décide qu'elle ne pourra pas poser de chocolat dans des cases qui partagent une arête, comme illustré ci-contre (en utilisant les mêmes conventions qu'à la question 13).

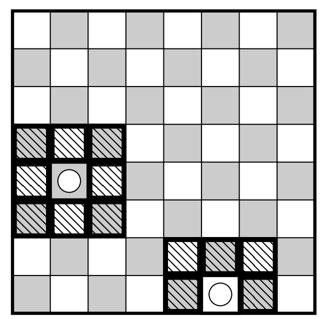
Combien, au maximum, Morgane peut-elle placer de chocolats sur son échiquier ?

Solution.



Tout d'abord, Morgane peut se permettre de placer un chocolat sur chaque case blanche, soit 32 chocolats au total. D'autre part, si on découpe l'échiquier 8×8 en 32 dominos 2×1, comme illustré ci-contre, on constate aisément que Morgane ne peut pas placer 2 chocolats sur un même domino. Elle peut donc placer au plus 1 chocolat par domino, soit 32 chocolats au total. Le maximum recherché est donc 32.

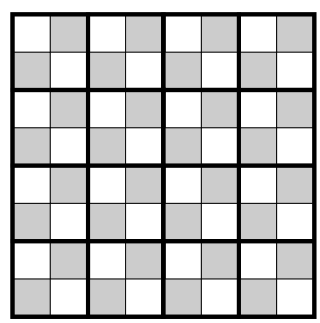
Question 15.



Mercredi, Morgane décide qu'elle ne pourra pas poser de chocolat dans des cases qui partagent une arête ou un coin, comme illustré ci-contre.

Combien, au maximum, Morgane peut-elle placer de chocolats sur son échiquier ?

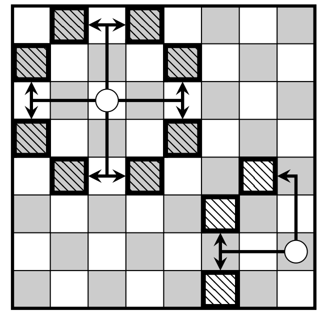
Solution.



Tout d'abord, si on divise l'échiquier 8×8 en 16 carrés 2×2, comme sur la figure de droite, on constate aisément que Morgane ne peut pas placer 2 chocolats sur un même carré 2×2. Elle peut donc placer au plus 1 chocolat par carré 2×2, soit 16 chocolats au total.

D'autre part, Morgane peut bien placer 16 chocolats sur son échiquier, par exemple en mettant un chocolat sur la case en bas à gauche de chacun des carrés 2×2. Le maximum recherché est donc 16.

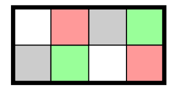
Question 16.



Jeudi, Morgane décide qu'elle ne pourra pas poser de chocolat dans des cases qui sont à un saut de cavalier l'une de l'autre, comme illustré ci-contre.

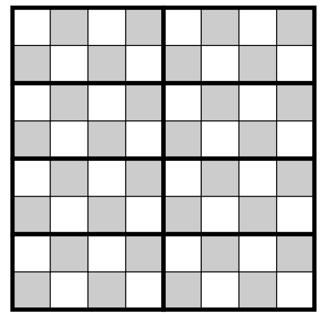
Combien, au maximum, Morgane peut-elle placer de chocolats sur son échiquier ?

Solution.



Tout d'abord, Morgane peut se permettre de placer un chocolat sur chaque case blanche, soit 32 chocolats au total.

D'autre part, considérons un rectangle 2×4, dont on va colorier les cases en utilisant 4 couleurs, comme illustré ci-contre. On constate aisément que Morgane ne peut pas placer 2 chocolats sur 2 cases de la même couleur dans notre rectangle 2×4. Ainsi, dans chaque rectangle 2×4, elle peut placer au plus 1 chocolat par couleur, soit 4 chocolats au total.



Par conséquent, si on découpe l'échiquier 8×8 en 8 rectangles 2×4, comme illustré ci-contre, Morgane peut placer au plus 32 chocolats. Le maximum recherché est donc 32.

Questions à rédiger

Vendredi, Vincent rend visite à son amie Morgane. Pour lui faire plaisir, il s'apprête à lui offir une boîte de 100 chocolats. Mais, afin de rendre ce cadeau plus intéressant, il lui propose de jouer au jeu suivant :

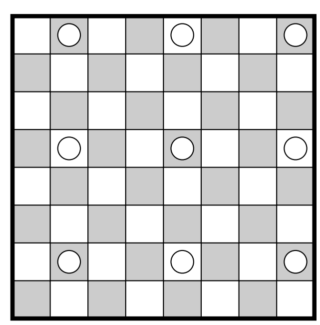
(a) Morgane peut prendre des chocolats de la boîte et les placer sur l'échiquier, en suivant les contraintes de mercredi : elle ne peut pas poser de chocolats dans deux cases ayant un côté ou un coin en commun.

(b) Si Vincent parvient à trouver une case de l'échiquier qui n'ait ni côté ni coin commun avec les cases où Morgane a placé ses chocolats, alors il reprendra tous les chocolats.

(c) Sinon, il mange les chocolats que Morgane a utilisés, et Morgane gagne ceux qui sont restés dans la boîte.

Question 17.

Démontrer que Morgane peut gagner 91 chocolats.



Solution.

Pour gagner 91 chocolats, il suffit que Morgane n'utilise que 9 chocolats, qu'elle disposera par exemple comme suit sur son échiquier.

Question 18.

Démontrer que Morgane ne peut pas gagner 93 chocolats.

Solution.

On va dire que Morgane *contrôle* une case c dès lors qu'elle a posé un chocolat sur la case c ou bien sur une case ayant un coin ou un côté commun avec c. Chaque fois que Morgane ajoute un chocolat sur son échiquier, elle va contrôler au plus 9 cases supplémentaires, qui sont la case sur laquelle elle vient de poser son chocolat et les cases qui lui sont voisines.

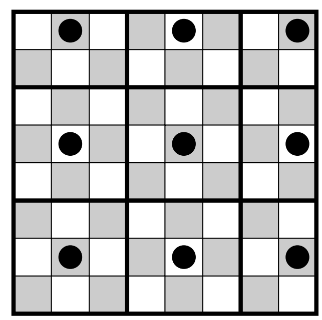
En particulier, si Morgane pose 7 chocolats ou moins, elle contrôlera au plus $9 \times 7 = 63$ cases, donc il restera au moins une case qu'elle ne contrôle pas, et qui servirait les desseins de Vincent. Ainsi, Morgane ne pourra jamais gagner 93 chocolats.

Question 19.

Démontrer que Morgane ne peut pas gagner 92 chocolats.

Solution.

Supposons que Morgane est parvenue à contrôler l'intégralité de l'échiquier : on va montrer qu'elle a dû utiliser au moins 9 chocolats, ce qui lui interdit de gagner 92 chocolats. En effet, si elle contrôle l'ensemble de l'échiquier, elle contrôle notamment les 9 cases que l'on a représentées ci-contre en y dessinant un disque noir ; notons que ce sont exactement les 9 cases sur lesquelles Morgane avait placé un jeton dans notre solution à la question 17.



Or, pour contrôler chacune de ces cases, elle a dû poser au moins un chocolat sur la case en question ou sur une case voisine. En d'autres termes, elle a dû poser au moins un chocolat dans chacun des rectangles dessinés ci-contre. Puisque ces rectangles sont disjoints, elle a donc dû utiliser au moins 9 chocolats, ce qui conclut.

Problème 4 : Produits maximaux

Chaque matin, avant de partir pour l'école, Adrien, Christophe et Martine jouent au jeu suivant :

(a) Martine choisit un entier $m \geqslant 2$.

(b) Adrien choisit deux entiers a et b tels que $a + b = m$.

(c) Christophe choisit deux entiers c et d tels que $c + d = m$.

(d) Adrien gagne si $ab \geqslant cd$, et il perd si $ab < cd$.

Questions à choix multiples

Question 20.

Lundi, Martine choisit $m = 8$. Quelles valeurs de a et b Adrien doit-il choisir pour être sûr de gagner ?

Solution.

Soit $n = m/2$ et $x = a - n$, de sorte que $a = n + x$ et $b = n - x$. Alors $ab = n^2 - x^2$ et, puisque $n = 4$, les nombres a et b sont entiers si et seulement si x est entier.

Adrien doit donc choisir un entier x tel que x^2 soit minimal. Ainsi, pour gagner, il doit choisir $x = 0$, c'est-à-dire $a = b = 4$.

Question 21.

Mardi, Martine choisit $m = 200$. Quelles valeurs de a et b Adrien doit-il choisir pour être sûr de gagner ?

Solution.

Le même raisonnement qu'à la question précédente montre ici qu'Adrien doit choisir $a = b = 100$.

Question 22.

Mercredi, Martine choisit $m = 11$. Quelles valeurs de a et b Adrien doit-il choisir pour être sûr de gagner ?

Solution.

Cette fois-ci, m est impair, donc $n = 5,5$. Ainsi, a et b sont entiers si et seulement si x est de la forme $(2k+1)/2$, avec k entier relatif. Par conséquent, x^2 sera minimal si et seulement si $x = \pm 1/2$, c'est-à-dire si et seulement si Adrien choisit $a = 5$ et $b = 6$ (ou $a = 6$ et $b = 5$).

Question 23.

Jeudi, Martine choisit $m = 10$ et, afin de rendre le jeu plus difficile, elle ajoute une nouvelle règle : le PGCD des entiers a et b soit être égal à 1, et le PGCD des entiers c et d doit aussi être égal à 1

Quelles valeurs de a et b Adrien doit-il choisir pour être sûr de gagner ?

Solution.

Ici, on a de nouveau $n = m/2 = 5$, et a et b sont entiers si et seulement si x l'est. Adrien doit donc choisir un entier x tel que x^2 soit aussi petit que possible, et tel que $\mathrm{PGCD}(a, b) = \mathrm{PGCD}(n - x, n + x) = 1$. Par ailleurs, quitte à échanger a et b, on peut supposer que $x \geqslant 0$.

En essayant successivement $x = 0, 1, 2 \ldots$, on constate que $\mathrm{PGCD}(n, n) = \mathrm{PGCD}(5, 5) = 5$, puis on observe que $\mathrm{PGCD}(n - 1, n + 1) = \mathrm{PGCD}(4, 6) = 2$, et on remarque enfin que $\mathrm{PGCD}(n + 2, n - 2) = \mathrm{PGCD}(3, 7) = 1$. Ainsi, Adrien doit choisir $a = 3$ et $b = 7$ (ou $a = 7$ et $b = 3$).

Questions à rédiger

Question 24.

Vendredi, Martine souhaite revenir au jeu original, et elle demande seulement que $a + b = c + d = m$.

En fonction de la valeur de m, quelles valeurs de a et b Adrien doit-il choisir pour être sûr de gagner ?

Solution.

Le raisonnement utilisé aux questions 20 et 22 montre directement qu'Adrien doit choisir $a = b = m/2$ si m est pair, et qu'il doit choisir $a = (m - 1)/2$ et $b = (m + 1)/2$ (ou l'inverse) si m est impair.

Question 25.

Samedi, Martine réintroduit la règle ajoutée jeudi : elle demande donc de nouveau que $a + b = c + d = m$ et que $\mathrm{PGCD}(a, b) = \mathrm{PGCD}(c, d) = 1$.

En fonction de la valeur de m, quelles valeurs de a et b Adrien doit-il choisir pour être sûr de gagner ?

Solution.

Cette fois-ci, on distingue non plus deux, mais trois cas, en supposant toujours que $a \leqslant b$, quitte à échanger les rôles de a et de b :

1. Si m est impair, alors la contrainte de PGCD sera automatiquement satisfaite dès lors qu'Adrien choisit $a = (m - 1)/2$ et $b = (m + 1)/2$.

   En effet, si d est un diviseur commun à a et à b, c'est-à-dire s'il existe des entiers k et ℓ tels que $a = kd$ et $b = \ell d$, alors $(\ell - k)d = b - a = 1$, donc d divise aussi 1, de sorte que $d = \pm 1$. Par conséquent, dans ce cas-là, on a bien $\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$, et donc Adrien a bien intérêt à choisir $a = (m - 1)/2$ et $b = (m + 1)/2$.
2. Si m est divisible par 4, alors Adrien ne peut pas choisir $a = b = m/2$, car dans ce cas on aurait $\mathrm{PGCD}(a, b) = m/2 > 1$.

   Son plan B consiste donc à choisir $a = m/2 - 1$ et $b = m/2 + 1$. Dans ce cas, si d est un diviseur commun à a et à b, le même raisonnement que ci-dessus montre que d divise $b - a = 2$. Or, a et b sont impairs, donc $d \neq \pm 2$, de sorte que $d = \pm 1$. Ainsi, dans ce plan B, on a bien $\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$.

   Adrien a donc bien intérêt à choisir $a = m/2 - 1$ et $b = m/2 + 1$.
3. Si m est divisible par 2 mais pas par 4, il ne peut toujours pas choisir $a = b = m/2$ (sauf si $m = 2$, bien sûr), et ne peut pas non plus choisir $a = m/2 - 1$ et $b = m/2 + 1$, car alors a et b seraient pairs tous les deux.

   Son plan C consiste donc à choisir $a = m/2 - 2$ et $b = m/2 + 2$. Dans ce cas, a est impair, et si d est un diviseur commun à a et à b, alors d divise $b - a = 4$, donc $d = \pm 1$. Ainsi, $\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$, donc Adrien a bien intérêt à choisir $a = m/2 - 2$ et $b = m/2 + 2$.