— Première partie — Questions à choix multiples —

Les calculatrices sont interdites. **Durée : 90 minutes**

Pour chaque question ci-dessous, 5 réponses potentielles sont proposées :

- une réponse est correcte : la choisir rapporte 4 points ;
- une réponse est incorrecte, et il est possible de détecter facilement qu'elle est incorrecte : la choisir fait perdre 4 points ;
- les trois autres réponses sont incorrectes, mais il n'est pas nécessairement facile de détecter qu'elles le sont : choisir une de ces réponses ne rapporte ni ne fait perdre aucun point ;
- ne choisir aucune réponse ou bien choisir deux réponses ou plus ne rapporte ni ne fait perdre aucun point.

Par exemple, dans la question 0 ci-dessous, choisir la réponse B rapporte 4 points et choisir la réponse D fait perdre 4 points. Choisir les réponses A, C ou E ne rapporte ni ne fait perdre aucun point. Enfin, toutes les réponses devront **absolument** être indiquées sur la formulaire de réponse : nous ne récupérerons pas les 4 premières pages.

Question 0.

Quelle est la superficie de la République Populaire de Chine ?

A. 4 372 819 km^2

B. 9 596 961 km^2

C. 7 319 004 km^2

D. 34 m^2

E. 13 732 190 km^2

Bonne chance !

Question 1.

Soit a et b des nombres réels tels que $a + b = 2017$. Quelle est la plus grande valeur possible que peut prendre le produit ab ?

A. $2017^2/4$ B. $2017^2/2$ C. 2017^2 D. 2014 E. 1008×1009

Question 2.

Une générale rassemble ses troupes avant d'aller au combat. Quand elle range ses soldats par groupes de 2, il reste 1 soldat qui n'appartient à aucun groupe. Quand elle range ses soldats par groupes de 3, il reste 2 soldats qui n'appartiennent à aucun groupe. Quand elle range ses soldats par groupes de 5, il reste 3 soldats qui n'appartiennent à aucun groupe.
Si la générale range ses soldats par groupes de 30, combien restera-t-il de soldats n'appartenant à aucun groupe ?

A. 0 B. 13 C. 19 D. 23 E. 25

Question 3.

Soit $ABCD$ un quadrilatère tel qu'illustré sur la Figure 1. On suppose que (AD) est perpendiculaire à (AB) et est parallèle à (BC).
Une fourmi, représentée par le point F, part du point A et marche le long du quadrilatère $ABCD$: elle va d'abord en B, puis en C, et enfin en D, où elle s'arrête. À chaque instant de son voyage, si la fourmi a parcouru une distance x depuis qu'elle a quitté le point A, on note y l'aire du triangle ADF (dessiné en gris sur la Figure 1). Sur la Figure 2, on représente les valeurs que prend y en fonction de x durant le voyage de la fourmi entre A et D.

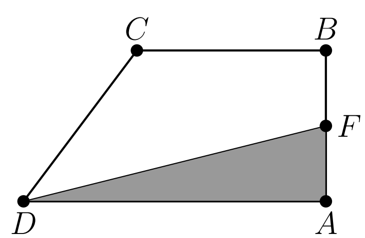

Figure 1

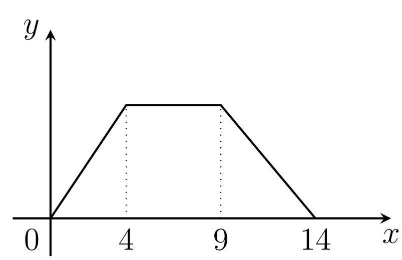

Figure 2

Quelle est l'aire du triangle ABD ?

A. 10 B. 16 C. 18 D. 26 E. 40

Question 4.

Clara adore les grands nombres. Elle n'aime pas les nombres inférieurs ou égaux à 31 et elle aime les autres nombres. Son amie Min, quant à elle, préfère l'intervalle réel I. Clara et Min jouent fréquemment au jeu suivant.
Min choisit tout d'abord un nombre réel $x \in I$. Elle l'écrit au tableau puis demande à Clara si elle aime ce nombre. Si Clara n'aime pas le nombre écrit au tableau, elle le dit à Min ; soucieuse de rendre son amie heureuse, Min efface alors le nombre écrit au tableau, le multiplie par 2, ajoute 1 au résultat, et écrit au tableau la nouvelle valeur qu'elle vient d'obtenir. Puis elle demande à Clara si celle-ci aime le nouveau nombre : si non, alors Min efface de nouveau le nombre écrit au tableau, le multiplie par 2, ajoute 1, écrit le nouveau nombre, interroge de nouveau Clara, et ainsi de suite.
Min et Clara ont remarqué que, lors de chaque partie, Clara n'aimait aucun des 4 premiers nombres écrits au tableau, et aimait toujours le $5^{\text{ème}}$ nombre. Puis elles ont prouvé que tous les réels $x \in I$ avaient cette propriété, et qu'aucun nombre réel $x \notin I$ ne l'avait.
Quel est l'intervalle I ?

A. $[0;3]$ B. $]1;3]$ C. $[1;3]$ D. $[0;2017]$ E. $]1;31]$

Question 5.

Une étudiante se promène. Partant du point A, elle marche d'abord sur 10 mètres en ligne droite, et arrive au point B. Puis elle tourne à gauche d'un angle α tel que $90° \leqslant \alpha < 180°$, marche de nouveau 10 mètres, et arrive en C. Elle recommence trois fois cette opération, tournant de l'angle α vers la gauche puis marchant 10 mètres en ligne droite. Ce faisant, elle arrive en D, puis en E, et retourne enfin en A.
Que vaut l'angle α ?

A. 90° B. 120° C. 135° D. 144° E. 150°

Question 6.

On dit qu'un entier est *troublant* si, en changeant l'ordre de ses chiffres, on obtient un cube (c'est-à-dire un entier de la forme n^3, où n est lui-même un entier). Par exemple, 72 et 612 sont troublants, car $27 = 3^3$ et $216 = 6^3$ sont des cubes.
Combien existe-t-il de nombres premiers p tels que $1 < p < 1000$ et ayant la propriété d'être troublants ?

A. 2 B. 3 C. 7 D. 16 E. 500

Question 7.

Soit ABC un triangle. On appelle D le milieu du segment $[BC]$, puis E le milieu de $[AD]$, et F le milieu de $[BE]$. Enfin, soit G le point d'intersection de la droite (CF) avec le segment $[AB]$.
Que vaut le rapport des longueurs BG/BA ?

A. 1/3 B. 2/7 C. 3/8 D. 4/3 E. 5/9

Question 8.

Soit a, b, c des réels positifs non nuls tels que $a+b+c=9$.
En supposant que $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}=\dfrac{10}{9}$, que vaut $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}$?

A. 10/9 B. 1/2 C. 3/2 D. 7 E. 10

Question 9.

Soit $ABCD$ un carré de côté 1. Soit E un point de $[BC]$ et F un point de $[CD]$ tels que le triangle AEF soit équilatéral.
Quelle est la longueur du segment $[EF]$?

A. $\sqrt{5}-1$ B. $-\sqrt{6}-\sqrt{2}$ C. $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ D. $\pi-2$ E. $3/2$

Question 10.

Durant une compétition de carabine, une participante tire 10 fois. Après chaque tir, on lui donne une note : cette note est un entier compris entre 0 et 100. Lors de ses $6^{\text{ème}}$, $7^{\text{ème}}$, $8^{\text{ème}}$ et $9^{\text{ème}}$ tirs, elle reçoit respectivement des notes de 83, 84, 81 et 100. Pour se qualifier pour la finale, la moyenne de ses notes, après le $10^{\text{ème}}$ tir, doit être strictement supérieure à 88.
En supposant que la moyenne de ses notes après le $5^{\text{ème}}$ tir était strictement inférieure à la moyenne de ses notes après le $9^{\text{ème}}$ tir, quelle est la note minimale qu'elle doit obtenir lors du dernier tir pour se qualifier en finale ?

A. 97 B. 98 C. $98,5$ D. 99 E. 100

Question 11.

Pour chaque nombre réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier n tel que $n \leqslant x$, on note $\lceil x \rceil$ le plus petit entier m tel que $x \leqslant m$, et on note $\{x\}$ le nombre réel $x - \lfloor x \rfloor$. On dit qu'un nombre réel x est remarquable si $0 \leq x \leq 10$ et si x est une solution de l'équation $\lfloor x \rfloor \times \lceil x \rceil \times \{x\} = 1$. Soit $x_1, x_2, \ldots, x_m$ les réels remarquables, écrits dans l'ordre croissant.
Que vaut la somme $x_1 + x_2 + \ldots + x_m$?

A. 0 B. $0,5$ C. $45,9$ D. 46 E. 120529/2520

Question 12.

On considère une grille carrée de 4 lignes et 4 colonnes, formée de 16 cases. On dit que deux cases distinctes sont voisines si elles ont un côté en commun. Initialement, chaque case est rouge. Par la suite, une case pourra changer de couleur et être soit bleue, soit rouge. On dit que l'on effectue une opération sur la case c lorsque l'on change la couleur de c ainsi que celle de toutes les cases voisines de c : les cases rouges deviennent bleues et les cases bleues deviennent rouges.
Pour combien de valeurs de n la phrase suivante est-elle vraie ?
« Il existe n des 16 cases telles que, en effectuant une (et une seule) opération sur chacune de ces n cases, la grille devient intégralement bleue. »

A. 4 B. 5 C. 8 D. 12 E. 16