— Deuxième partie — Questions avec réponse rédigée —

Les calculatrices sont interdites. **Durée : 60 minutes**

Pour chacun des problèmes ci-dessous, une ou deux questions sont posées. Le nombre de points que peut rapporter chaque question est indiquée clairement à côté de l'énoncé de la question.
Pour chaque question, vous devez non seulement indiquer le résultat de la question, mais également prouver que ce résultat est correct. Chaque affirmation devra être clairement justifiée : votre note dépendra notamment de la clarté et de la précision de votre rédaction.
Les solutions à chacun des problèmes doivent être rédigées sur quatre feuilles séparées. N'oubliez pas d'indiquer, sur chacune de ces feuilles, le numéro du problème auquel vous répondez, ainsi que votre numéro d'étudiant.

Problème 1 (8 points)**.**

Soit $ABCD$ un rectangle d'aire 1. Soit I le milieu de $[AD]$ et soit J le milieu de $[BC]$. Soit X le point d'intersection de (AJ) et de (BI), et soit Y le point d'intersection de (DJ) et de (CI).
Quelle est l'aire du quadrilatère $IXJY$?

Problème 2.

On répartit les entiers naturels non nuls de la façon suivante :

$$\{1, 2\} \qquad \{3, 4, 5\} \qquad \{6, 7, 8, 9\} \qquad \{10, 11, 12, 13, 14\} \qquad \ldots$$

(a) (4 points) Quel est le plus petit élément du $50^{\text{ème}}$ groupe ?

(b) (8 points) Quel est le plus grand entier qui soit à la fois le plus grand élément de son groupe et qui soit inférieur ou égal à 2017 ?

Problème 3 (16 points)**.**

Soit x, y et z des nombres réels tels que $(x+y)^2 \leqslant z^2$, $(y+z)^2 \leqslant x^2$ et $(z+x)^2 \leqslant y^2$.
Démontrer que $x+y+z=0$.

Problème 4.

On dit qu'un entier est mignon s'il a exactement 10 chiffres, qui appartiennent tous à l'ensemble $\{1, 2, 3\}$, et si deux chiffres consécutifs diffèrent systématiquement de 1.

(a) (8 points) Combien existe-t-il d'entiers mignons ?

(b) (8 points) Quelle est la somme de tous les entiers mignons ?