Association pour l'animation mathématique

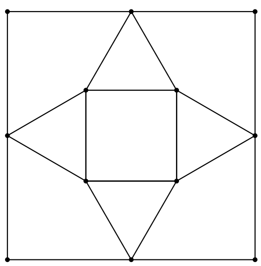
COUPE ANIMATH

Mardi 3 juin 2014

CORRIGÉ

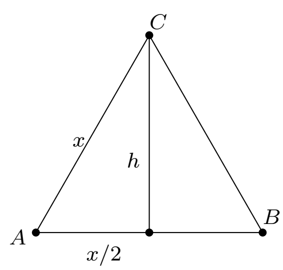
Énoncés collège

Exercice 1. *Dans cette question, et uniquement cette question, on demande une réponse sans justification.*



Sachant que le petit carré est de côté x et que les triangles sont équilatéraux, déterminer la longueur du côté du grand carré.

Solution de l'exercice 1



La hauteur h d'un triangle équilatéral de côté x est égale à $x\frac{\sqrt{3}}{2}$.

En effet, d'après le théorème de Pythagore on a $x^2 = h^2 + (x/2)^2$, donc $h^2 = x^2 - (x/2)^2 = \frac{3}{4}x^2$.

Le côté du grand carré vaut donc $x + 2h = x(1+\sqrt{3})$.

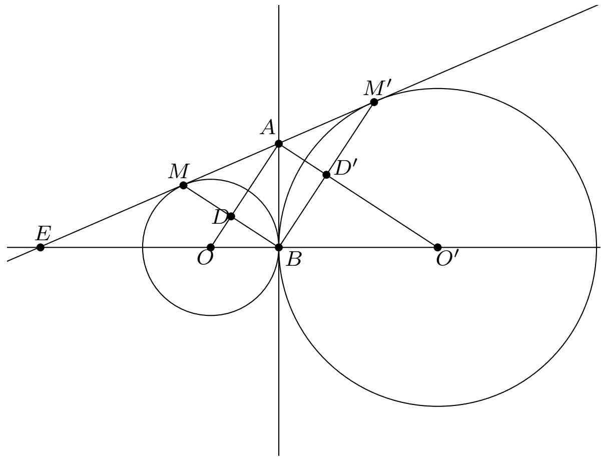
Exercice 2. Trouver tous les couples de chiffres (a, b) tels que l'entier dont les quatre chiffres sont $ab32$ soit divisible par 99.

Solution de l'exercice 2 Soit n l'entier formé par les deux chiffres ab. On cherche a et b de sorte que $100n+32$ soit divisible par 99.
Or, $100n + 32 = n + 32 + 99n$, donc la condition équivaut au fait que $n + 32$ soit divisible par 99.
Or, $0 \leqslant n \leqslant 99$, donc $32 \leqslant n + 32 \leqslant 131$. L'unique entier entre 32 et 131 qui est divisible par 99 étant 99, la seule solution est $n = 99 - 32 = 67$, c'est-à-dire $a = 6$ et $b = 7$.

Exercice 3. Deux cercles, l'un de centre O et de rayon R, l'autre de centre O' et de rayon R' avec $R < R'$, sont tangents extérieurement en B. Soit (T) la tangente commune passant par B.
On mène une autre tangente commune (MM') (où M appartient au premier cercle et M' au second). Cette tangente coupe (T) en A. Les droites (OA) et $(O'A)$ coupent BM et BM' en D et D'. Les droites (OO') et (MM') se rencontrent en E.

(1) Démontrer que (DD') est parallèle à (MM').
(2) Prouver que OAO' est rectangle en A.
(3) Calculer la longueur EO en fonction de R et R'.
(4) Calculer la longueur DD' en fonction de R et R'.

Solution de l'exercice 3



Notons $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ les deux cercles.

1) Les deux tangentes à $\mathcal{C}$ menées à partir de A étant (AM) et (AB), leurs points de contact M et B sont symétriques par rapport à (AO), donc D est le milieu de $[MB]$. De même, D' est le milieu de $[M'B]$. D'après le théorème des milieux dans le triangle BMM', (DD') est parallèle à (MM').

2) On a $180° = \widehat{MAO} + \widehat{OAB} + \widehat{BAO'} + \widehat{O'AM'} = 2(\widehat{OAB} + \widehat{BAO'}) = 2\widehat{OAO'}$ donc $\widehat{OAO'} = 90°$.
Autre méthode.
(OA) et $(O'A)$ sont les médiatrices de $[MB]$ et $[M'B]$ donc $AM = AB = AM'$. On en déduit que le triangle MBM' est rectangle en B.
Alors le quadrilatère $ADBD'$ a 3 angles droits : c'est un rectangle donc DAD' est aussi un angle droit et OAO' est aussi un triangle rectangle.

3) (OM) et $(O'M')$ sont parallèles puisque perpendiculaires à (MM'). D'après le théorème de Thalès, on a

$$\frac{R}{R'} = \frac{OM}{O'M'} = \frac{EO}{EO'} = \frac{EO}{EO + R + R'}.$$

En multipliant membre à membre par $R'(EO + R + R')$, on obtient $R(EO + R + R') = EO \times R'$ donc $(R' - R)EO = R(R + R')$. Finalement,

$$EO = \frac{R(R + R')}{R' - R}.$$

4) Les diagonales du rectangle $DAD'B$ ont la même longueur donc $DD' = AB$.
D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\begin{aligned} AO^2 &= R^2 + AB^2 \\ AO'^2 &= R'^2 + AB^2 \end{aligned}$$

On additionne terme à terme :

$$\begin{aligned} OO'^2 &= R^2 + R'^2 + 2AB^2 \\ (R + R')^2 &= R^2 + R'^2 + 2AB^2 \\ 2RR' &= 2AB^2. \end{aligned}$$

Il vient $AB^2 = RR'$ donc $DD' = AB = \sqrt{RR'}$.

Autre méthode.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle EMO, on a

$$\begin{aligned} EM^2 &= EO^2 - MO^2 = \frac{R^2(R+R')^2}{(R'-R)^2} - R^2 = R^2 \times \left(\frac{(R+R')^2}{(R'-R)^2} - 1\right) \\ &= R^2 \times \frac{(R+R')^2 - (R-R')^2}{(R-R')^2} = R^2 \times \frac{(R+R'+R-R')(R+R'-(R-R'))}{(R-R')^2} \\ &= \frac{4R^2RR'}{(R'-R)^2}. \end{aligned}$$

On en déduit que $EM = \frac{2R}{R'-R}\sqrt{RR'}$.
Comme $EM' = \frac{R'}{R}EM$, on a $EM' = \frac{2R'}{R'-R}\sqrt{RR'}$. Il vient

$$MM' = EM' - EM = 2\frac{R'-R}{R'-R}\sqrt{RR'} = 2\sqrt{RR'}.$$

Comme D et D' sont les milieux de $[BM]$ et $[BM']$, on en déduit que $DD' = \sqrt{RR'}$.

Autre solution. On a $\widehat{BOA} = 90° - \widehat{OAB} = \widehat{BAO'}$. On en déduit que les triangles rectangles OBA et ABO' sont semblables, donc $\frac{AB}{OB} = \frac{O'B}{AB}$, ce qui s'écrit aussi $\frac{AB}{R} = \frac{R'}{AB}$, ou encore $AB = \sqrt{RR'}$.
Or, on a $AM = AB$ et $AM' = AB$, donc $MM' = 2\sqrt{RR'}$. Comme D et D' sont les milieux de $[BM]$ et $[BM']$, on en déduit que $DD' = \sqrt{RR'}$.

Énoncé commun

Exercice 4. a) Est-il possible de répartir les nombres $1, 2, 3, \dots, 10$ en cinq paires de sorte que les cinq sommes par paires donnent cinq nombres premiers différents ?
b) Est-il possible de répartir les nombres $1, 2, 3, \dots, 20$ en dix paires de sorte que les dix sommes par paires donnent dix nombres premiers différents ?

Solution de l'exercice 4 a) Oui : $1 + 4 = 5$, $3 + 8 = 11$, $5 + 2 = 7$, $7 + 6 = 13$, $9 + 10 = 19$.
b) Les nombres premiers sommes de deux entiers distincts parmi $1, \dots, 20$ sont compris entre 3 et 39, donc figurent parmi $3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37$. La somme de ces nombres premiers vaut 195, qui est strictement plus petite que $1 + 2 + \cdots + 20 = 210$. Par conséquent, il n'est pas possible d'effectuer le regroupement comme dans l'énoncé.

Énoncés lycée

Exercice 5. Lors d'un tournoi de football, chaque équipe rencontre exactement deux fois chacune des autres. Il n'y a pas de match nul, une victoire rapporte deux points et une défaite ne rapporte rien. Il se trouve qu'une seule équipe a remporté le tournoi avec 26 points, et qu'il y a deux équipes dernières ex-aequo avec 20 points chacune. Déterminer le nombre d'équipes, et donner un exemple de tournoi où de tels résultats se produisent.

Solution de l'exercice 5 Notons n le nombre d'équipes.
Chaque équipe gagne un nombre de matchs compris entre 10 et 13. Comme il y a $n(n-1)$ matchs, chaque équipe gagne en moyenne $n-1$ matchs. L'équipe victorieuse et les deux dernières ex-aequo gagnent en moyenne 11 matchs, tandis que les autres équipes gagnent en moyenne entre 11 et 12 matchs. Par conséquent, le nombre moyen de matchs gagné par équipe est $\geqslant 11$ et < 12. Comme $n-1$ est un entier, on a nécessairement $n - 1 = 11$, c'est-à-dire $n = 12$.

Montrons qu'un tel tournoi est possible. Pour se fixer les idées, disons que les 12 équipes appartiennent à 12 villes différentes. Chaque paire de villes joue deux matchs, l'un dans la ville de l'une des équipes et l'autre dans la ville de l'autre équipe. On dira qu'une équipe joue à domicile si le match se déroule dans sa ville, et à l'extérieur sinon.
Voici un exemple de tournoi qui convient : lorsque deux des équipes $2, \ldots, 12$ se rencontrent, celle qui joue à domicile gagne. De plus, l'équipe 1 gagne tous ses matchs contre les équipes 2 et 3, et gagne seulement à domicile contre les équipes $4, \ldots, 12$.

Autre solution pour la première partie. Notons a le nombre d'équipes qui gagnent 11 matchs et b le nombre d'équipes qui gagnent 12 matchs. Le nombre total d'équipes est $n = 3+a+b$. D'autre part, le nombre de matchs gagnés est $n(n-1) = 10 \times 2 + 11a + 12b + 13 = 33 + 11a + 12b = 11(3+a+b) + b = 11n + b$. On en déduit que $b = n(n-1) - 11n = n(n-12)$. Comme $0 \leqslant b < n$, on a $0 \leqslant n(n-12) < n$. En divisant par n, on obtient $0 \leqslant n - 12 < 1$, d'où $n = 12$.

Exercice 6. Étant donnés un point P et un cercle $\mathcal{C}$ du plan, on appelle *distance de P à $\mathcal{C}$* la longueur minimale PM entre P et un point M du cercle $\mathcal{C}$. Par exemple, si P appartient au cercle alors la distance de P à $\mathcal{C}$ est nulle, et si P est le centre du cercle alors la distance de P à $\mathcal{C}$ est égale au rayon de $\mathcal{C}$.
Étant donnés quatre points A, B, C, D non cocycliques, combien y a-t-il au maximum de cercles qui passent à égale distance de ces quatre points ?

Solution de l'exercice 6 Soit $\mathcal{C}$ un cercle passant à égale distance de A, B, C, D. Les quatre points ne peuvent pas être tous intérieurs au cercle, sinon ils seraient équidistants du centre, donc seraient cocycliques. De même, ils ne peuvent pas être tous extérieurs.
Déterminons le nombre de cercles $\mathcal{C}$ passant à égale distance de A, B, C, D tels que A, B, C soient du même côté du cercle. Supposons A, B, C non alignés. Soit Ω le centre du cercle circonscrit à A, B, C et R son rayon. Notons r le rayon de $\mathcal{C}$ et $d = \Omega D$. Le fait que A, B, C, D soient équidistants de $\mathcal{C}$ s'écrit $|r - R| = |r - d|$. De plus, $r - R$ et $r - d$ ne peuvent pas être égaux, sinon on aurait $d = R$ et A, B, C, D seraient cocycliques. L'égalité $|r - R| = |r - d|$ équivaut donc à $r - R = d - r$, ou encore à $r = \dfrac{R+d}{2}$, ce qui prouve l'existence et l'unicité du cercle $\mathcal{C}_D$ tel que A, B, C soient d'un côté et D de l'autre côté du cercle.
(Si A, B, C sont alignés, aucun point n'est équidistant de A, B, C, donc il n'existe pas de cercle passant à égale distance de A, B, C tel que A, B, C soient tous du même côté du cercle.)
On définit de même les cercles $\mathcal{C}_A$, $\mathcal{C}_B$ et $\mathcal{C}_C$ s'ils existent.

Déterminons le nombre de cercles $\mathcal{C}$ passant à égale distance de A, B, C, D tels que A, B soient d'un côté et C, D de l'autre. Le centre de $\mathcal{C}$ est nécessairement équidistant de A et B, donc se situe sur la médiatrice de $[AB]$. De même, il se situe sur la médiatrice de $[CD]$.
Supposons que (AB) et (CD) ne sont pas parallèles. Alors les médiatrices de $[AB]$ et de $[CD]$ se rencontrent en un point Ω. Soient $R_1 = \Omega A$ et $R_2 = \Omega C$. Alors $R_1 \neq R_2$ car A, B, C, D ne sont pas cocycliques. Comme dans le cas précédent, on voit que le cercle de centre Ω et de rayon $\dfrac{R_1 + R_2}{2}$ est l'unique cercle équidistant de A et B tel que A et B sont d'un côté et C, D de l'autre. Notons-le $\mathcal{C}_{AB}$.
Supposons que les médiatrices de $[AB]$ et $[CD]$ sont parallèles non confondues. Alors il n'existe pas de cercle équidistant de A, B, C, D tel que A, B soient d'un côté et C, D de l'autre.
Supposons que les médiatrices de $[AB]$ et $[CD]$ sont confondues. Si A, B, C, D ne sont pas alignés, alors les médiatrices de $[AB]$ et de $[AC]$ se coupent en un point Ω qui est équidistant de A, B, C, D, ce qui contredit le fait que A, B, C, D ne sont pas cocycliques.
Supposons que A, B, C, D sont alignés tels que les milieux de $[AB]$ et de $[CD]$ sont confondus. Il y a alors une infinité de cercles passant à égale distance de A, B, C, D, les centres étant sur la médiatrice commune.

La discussion qui précède montre que, sauf dans le cas particulier où les quatre points sont alignés de sorte que le milieu de deux points est égal au milieu des deux autres, $\boxed{\text{il y a au plus 7 cercles}}$ passant à égale distance de A, B, C, D : il s'agit de $\mathcal{C}_A$, $\mathcal{C}_B$, $\mathcal{C}_C$, $\mathcal{C}_D$, $\mathcal{C}_{AB}$, $\mathcal{C}_{AC}$, $\mathcal{C}_{AD}$. L'égalité a lieu lorsque deux quelconques des six droites déterminées par A, B, C, D ne sont pas parallèles.

Exercice 7. Déterminer tous les entiers $x_1, x_2, \cdots, x_9, x_{10}$ tels que
$0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_9 < x_{10}$ et $x_9 x_{10} \leqslant 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_9)$.

Solution de l'exercice 7 On vérifie immédiatement que $x_1 = 1, x_2 = 2, \ldots, x_{10} = 10$ est une solution. Montrons qu'il n'y en a pas d'autre.
Première méthode. Notons $a = x_9$ et $b = x_{10}$ pour abréger. On a

$$a(a+1) \leqslant ab \leqslant 2((a-8) + \cdots + (a-1) + a) = 18a - 72,$$

donc $72 \leqslant 18a - a(a+1) = a(17-a)$. Ceci prouve que $a \leqslant 16$. De plus, comme $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_9 = a$ on a $a \geqslant 9$. En essayant toutes les valeurs de a comprises entre 9 et 16, on voit que la seule valeur qui satisfait l'inégalité est $a = 9$. On a alors

$$90 = a(a+1) \leqslant ab \leqslant 18a - 72 = 90,$$

donc $a(a+1) = ab$, d'où $b = a + 1 = 10$. Comme $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_9 = 9$, on a nécessairement $x_k = k$ pour tout $k = 1, 2, \ldots, 10$.

Remarque : si on ne veut pas essayer toutes les valeurs de a comprises entre 9 et 16, on peut remarquer que

$$72 \leqslant a(17-a) \iff a^2 - 17a + 72 \leqslant 0 \iff (a-8)(a-9) \leqslant 0 \iff 8 \leqslant a \leqslant 9.$$

Deuxième méthode. On sait que pour tout entier naturel n on a $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
On a $x_9 x_{10} \leqslant 2(1 + 2 + 3 + \cdots + (x_9 - 1) + x_9) = x_9(x_9 + 1)$, donc $x_{10} \leqslant x_9 + 1$. Comme on a d'autre part $x_{10} > x_9$, on en déduit que $x_{10} = x_9 + 1$ et que

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_9 = 1 + 2 + \cdots + x_9.$$

Par conséquent, tous les entiers entre 1 et x_9 figurent dans la liste $x_1, \ldots, x_9$, ce qui entraîne que $x_k = k$ pour tout $k = 1, 2, \ldots, 10$.