Exercices de maths -CSK - 2017/2018

Antoine PICHOFF

1. Symétrie et art du calcul

Racine d'une équation de degré n

N° 1

Polynôme de degré 2

On note A et B, les deux racines de $x^2 + px + q = 0(*)$.

1. Montrer que $f : (x, y) \mapsto (x - y)^2$ est invariant par la permutation $(A, B) \to (B, A)$.
   On en déduit que $f(A, B)$ s'écrit en fonction des nombres p et q.
2. Développer f, sachant que A et B sont solution de $(*)$, exprimer $f(A, B)$ en fonction de p et q.
   Cela vous rappelle-t-il quelque chose ?
3. On note $M = A + B$, montrer que l'on peut choisir $A = \frac{1}{2}(M + \sqrt{f(A,B)})$ et $B = \frac{1}{2}(M - \sqrt{f(A,B)})$
4. Retrouver la formule bien connue avec le discriminant.
   Comment exploiter ce résultat pour une équation de la forme : $rx^2 + px + q = 0$?

N° 2

Quantité associées (conjuguée)

Trouver l'équation polynomiale à coefficients entiers de plus bas degré admettant pour solution $x_1 = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Donner les autres solutions, sans calcul.

N° 3

Complément exposé On note A, B, C et D les quatre racines de $x^4+px^2+qx+r = 0$. Puis $f_1(A,B,C,D) = AB+CD$, $f_2(A,B,C,D) = AC + BD$ et $f_3(A,B,C,D) = AD + BC$.

Montrer que $f_1(A,B,C,D)$ $f_2(A,B,C,D)$ et $f_3(A,B,C,D)$ sont les racines de $x^3 - px^2 - 4rx + (4pr - q^2) = 0$.

N° 4

Polynôme de degré 4**. Méthode de Descartes** On note A, B, C et D les quatre racines de $x^4 + px^2 + qx + r = 0$.

1. Montrer que $g_1(A,B,C,D) = (A + B - C - D)^2$, associé avec g_2 et g_3 (à déterminer) sont invariantes sous les permutations de (A,B,C,D)
2. En déduire un polynôme de degré 3 dont $g_1(A,B,C,D)$ $g_2(A,B,C,D)$ et $g_3(A,B,C,D)$ sont les racines.

N° 5

Polynôme de degré 3**. Nombres** j On note A, B et C les trois racines de $x^3 + px + q = 0$.

On considère un « nombre » j tel que $j^3 = 1$, $1 + j + j^2 = 0$ et la règle de calcul suivante :

$$(a+bj+cj^2)(a'+b'j+c'j^2) = (aa'+bc'+cb')+j(ab'+ba'+cc')+j^2(ac'+bb'+ca')$$

1. Montrer que $h_1 : (A,B,C) \to \frac{1}{27}(A + jB + j^2C)^3$ et $h_2 : (A,B,C) \to \frac{1}{27}(A + jC + j^2B)^3$ sont stables par permutations sur (A,B,C)
2. Donner un polynôme de degré 2 dont les racines sont h_1 et h_2
3. On note $u = \frac{1}{3}(A + jB + j^2C)$ et $v = \frac{1}{3}(A + jC + j^2B)$, montrer qu'on peut alors choisir
$$A = u + v \qquad B = j^2u + jv \qquad C = ju + j^2v$$
4. La règle des produits de j vous semble-t-elle justifiée ?
5. Ce « nombre » j existe-t-il ?
   (a) Dans $\mathbb{C}$ (si vous connaissez), montrer que $e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ vérifie les équations de définitions de j
   (b) Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, montrer que $J_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie les équations de définitions de j
   (c) Êtes-vous capable de donner également une incarnation de j dans les monde des transformations géométriques du plan
6. Résoudre $x^3 + 3x - 7 = 0$

Organisation et anticipation

N° 6

Calculer $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2048}$

N° 7

Démontrer l'égalité de LAGRANGE :

$$\forall\ a,b,c,d \in \mathbb{R}, (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

En déduire 2 décompositions différentes de 221 en somme de deux carrés.

N° 8

Sans faire le calcul donner le développement de $(x-2y)^4$. Vérifier en effectuant le calcul.

N° 9

Même exercice avec

a. $(a+2b-c)^6$ b. $(2a-b-c)^5$

c. $(a+b-c-d)^4$ d. $(a-2b-c+d)^5$

Comment auto-contrôler ?

N° 10

Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n) \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots b_n^2)$

En fait, il y a une erreur dans l'énoncé... On commencera par la localiser...

Symétries

N° 11

Soient x, y et z des réels positifs ou nuls vérifiant $x + y + z = 1$.

Prouver les inégalités :

$$0 \leqslant xy + yz + zx - 2xyz \leqslant \frac{7}{27}$$

Est-ce optimal ?

N° 12

D'après Olympiades 1-ière S 2016

On considère un pavé droit de dimensions : x, y et z. On appelle facteur de compacité d'un solide le rapport $c = \dfrac{\text{surface}}{\text{volume}}$

1. Calculer le facteur de compacité de ce pavé.
2. Vérifier que pour tous nombres a, b et c :
$a^3+b^3+c^3-3abc = \dfrac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a-^2]$
3. En déduire que pour tous nombres réels positifs a, b et c, $a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc$
4. En déduire que pour tous nombres réels positifs A, B et C, dont le produit est égal à 1, $A+B+C \geqslant 3$
5. Quel est le pavé droit de volume 1 qui rend minimal le facteur de compacité ?

N° 13

Soient quatre entiers a, b, c et d. On suppose qu'ils ne sont pas tous égaux. En partant de (a, b, c, d) et en appliquant des itérations de la transformation $T : (a, b, c, d) \mapsto (a-b, b-c, c-d, d-a)$, montrer qu'au moins l'un des quatre nombres deviendra arbitrairement grand.

N° 14

Formule d'Héron

Il existe une formule, appelée formule d'Héron, qui donne l'aire du triangle S en fonction des mesures de trois côtés a, b et c.
Plus précisément, S est la racine d'un polynôme en a, b, c.
En exploitant les conditions d'un triangle plat, la symétrie et l'homogénéité, donner l'expression de S.
En notant $p = \frac{a+b+c}{2}$, trouver que $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)p}$.

Auto-contrôle

N° 15

Pourquoi les résultats suivants sont clairement faux ?
Comment les corriger ?

— $1+3+5+7+\cdots+(2n+1) = (n+1)^2 - n^2$
— $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$
— $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \frac{1}{4}n(n+1)$
— $3+9+27+\cdots+3^n = \frac{1}{2}(3^{n+1}-1)$

N° 16

Pourquoi les résultats suivants sont clairement faux ?
Comment les corriger ?

— $\cos a + \cos b = 2\cos(\frac{a+b}{2})\sin(\frac{a-b}{2})$
— $\cos a - 1 = \cos^2(\frac{a}{2})$
— $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1+\tan^2 a}$

Calculs approchés

N° 17

Un automobiliste achète 34,25L de carburant pour faire le plein du réservoir de sa voiture. Depuis le plein précédent, il a parcouru 537 kilomètres.
Pour 100 km, l'automobiliste consomme : 6,37 - 6,73 - 7,36 ou 7,63 L ?

N° 18

Comparer $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ à $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$.
En déduire une valeur approchée de $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1022}+\frac{1}{1023}$

Problème

N° 19

Inégalité de réarrangement

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On considère deux suites finies de réels **positifs** : $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et b_1, b_2, b_n.
On suppose que ces suites sont ordonnées : $a_1 < a_2 < a_3 \cdots < a_{n-1} < a_n$ et $b_1 < b_2 < b_3 \cdots < b_{n-1} < b_n$.
On considère une permutation de (b_i), que l'on note (c_i).
Autrement écrit ; à tout i de $[\![1, n]\!]$, correspond un unique j de $[\![1, n]\!]$ tel que $b_i = c_j$
Avec les (c_i), nous avons *perdu* l'ordre de (b_i).
Par la suite, on considère : $S_c = \sum_{i=1}^{n} a_i c_i = a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n$

1. Combien existe-t-il de telle suite (c_i) possible ?
2. Démontrer le résultat suivant :
pout toute permutation (c_i) de (b_i), on a
$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i+1}}_{=S_{-b}} < \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i c_i}_{=S_c} < \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}_{=S_b}$
3. En considérant $M = \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$, puis $A_i = \frac{x_1x_2\cdots x_i}{m^i}$, $(a_i) = (A_k)$ ordonnée par ordre croissant et enfin (b_i) tel que $b_i = \frac{1}{a_i}$, montrer l'inégalité arithmético-géométrique :
pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ $\qquad \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n} \leqslant \dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$
4. Démontrer l'inégalité de Tchebychev :
$\dfrac{a_1b_1+\cdots a_nb_n}{n} \leqslant \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \times \dfrac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}$
5. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz (N°10)

Bibliographie

Articles et revues

— Symétries, Alain Connes (Pour la science - février 2002)
— Riemann, (Les génies de la sience - août-novembre 2002)
— Galois, (Les génies de la sience - février-mai 2003)
— Leibniz, (Les génies de la sience - août-octobre 2006)
— Gauss, (Les génies de la sience - août-octobre 2008)

Livres

— Histoires de mathématiciens et de physiciens, Simon Gindikin (Cassini)
— L'analyse au fil de l'histoire, E. Hairer, G. Wanner (Springer)
— La symphonie des nombres premiers, M. du Sautoy (Eloïse d'Ormesson)
— Dans la jungle des nombres premiers, J. Derbyshire (Dunod)
— Sur le le nombre de nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée, B. Riemann

Conférence en ligne

— Les Mathématiques et la pensée en mouvement : conférence CPES, Alain Connes (Vimeo)
— Parcours d'un mathématicien, MPT #13, Alain Connes (Youtube)